Разбор задачи «B. Праздничные открытки»

Автор задачи — Е. Андреева, автор разбора — Б. Василевский

Назовем две открытки соседними, если они пересекаются хотя бы по одной клетке стола.

Сформулируем простой, но важный факт, следующий из условия. Пусть существует способ извлечь половину открыток требуемым образом. Соответствующую последовательность номеров обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_p$, где $p = nm/2$. Тогда произвольная перестановка указанных чисел также приводит к правильному решению задачи. Другими словами, **порядок извлеченя открыток не имеет значения**. Действительно, доставая очередную, мы влияем лишь на соседние с данной открытки. С другой стороны, рассматриваемая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_p$ очевидно не может содержать соседние, ведь иначе клетка стола, по которой они пересекаются, станет в результате ненакрытой.

Решение на 30 баллов

Для прохождения первой группы тестов достаточно было написать какой-нибудь перебор.

Например, рассмотрим клетку (i, j) стола. Очевидно, что ровно одна из двух открыток, накрывающих эту ячейку, будет извлечена. В свете рассуждений в начале разбора, для каждой клетки достаточно будет перебрать оба этих варианта. Тогда придется рассмотреть 2^{NM} конфигураций, что допустимо при небольших ограничений тестов первой группы $NM \leq 24$. Каждую из них необходимо проверить на корректность. Если противоречий не возникло, то есть каждая клетка стола накрывается ровно одной открыткой, то ответ найден.

Важно также не забывать про существование тестов с ответом `NO`.

Решение на 60 баллов

Рассмотрим граф, в котором вершинами будут клетки стола, а ребрами — открытки. Если открытка лежит на клетках (i_1, j_1) и (i_2, j_2) стола, то соответствующее ей ребро соединяет вершины (i_1, j_1) и (i_2, j_2) графа. Таким образом, степень каждой вершины равна двум. Если на столе имеются совпадающие открытки, то в построенном графе возникнут кратные ребра.

Назовем вершину (i, j) четной, если сумма $i + j$ четная. Все остальные вершины будем назовать нечетными.

Нетрудно увидеть, что полученный граф является двудольным: первая доля состоит из четных вершин, вторая — из нечетных. Найдем максимальное паросочетание в этом графе и обозначим его размер через A. Если $A = NM/2$, то есть паросотчетание совершенно, тогда выбранные ребра (открытки) искомые — удаляя их, мы оставим ровно один слой на столе. Это обусловленно тем, что теперь из каждой вершины ведет ровно одно ребро, то есть каждую клетку накрывает ровно одна открытка.

Верным является обратное утверждение: если существует способ достать некоторые открытки требуемым образом, то в нашем графе существует совершенное паросочетание, составленное из соответствующих этим открыткам ребер. Итак, если $A < NM/2$, то ответ `NO`.

Ограничения второй группы тестов были такими, что можно было хранить этот граф в памяти любым способом. Для поиска максимального паросочетания можно было воспользоваться алгоритмом Куна.

Правильное решение

Рассмотрим граф, описанный в решении на 60 баллов. Как уже было замечено, степень каждой вершины в нем равна двум. Поэтому наш граф представляет собой набор из нескольких непересекающихся по ребрам циклов. Для решения задачи необходимо удалить ровно $NM/2$ ребер так, чтобы степень каждой вершины стала ровно 1, или выяснить, что это невозможно.

Очевидно, что эту операцию достаточно провести независимо для каждого цикла. Рассмотрим один из них и обозначим его $\mathscr{C}$. Если он имеет нечетную длину, то искомого способа не существует. Иначе, пусть ребра этого цикла имеют номера $c_1, c_2, \ldots, c_{2k}$. Ясно, что надо удалять либо все нечетные $(c_1, c_3, \ldots, c_{2k-1})$, либо все четные $(c_2, c_4, \ldots, c_{2k})$. Из рассуждения в начале разбора становится понятно, что необходимым и достаточным условием для возможности удаления каждой из этих последовательностей является отсутствие в ней таких ребер, что соотвутствующая открытка лежит снизу обеими половинками.

Итак, если у каждого из циклов $\mathscr{C}_i$ длина делится на 2, и из $\mathscr{C}_i$ можно удалить либо все четные, либо все нечетные ребра, то ответ `YES`. Иначе (если найдется хотя бы один плохой цикл) ответ `NO`.

Описанное решение работает за $O(NM)$, что допустимо при ограничениях $1 \le N, M \le 700$.