Московская городская командная олимпиада 2019 года
Лига Б

Разбор задач

Задача «Целые точки»

```
~  python3
Python 3.6.8 (default, Oct  7 2019, 12:59:55)
[GCC 8.3.0] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> 12312313131321313 / 2
6156156565660656.0
```

Автор задачи: Владимир Романов
Разработчик: Григорий Резников

Формальная постановка

- Дано n прямых вида $y = x + c$ и $y = -x + c$
- Определить количество пар прямых, которые пересекаются в точке с целыми координатами

Решение

- Две прямые вида $y = x + a$ и $y = x + b$, очевидно, не пересекаются, так как их угловые коэффициенты совпадают
- Аналогично с прямыми вида $y = -x + a$ и $y = -x + b$
- Рассмотрим пару прямых $y = x + a$ и $y = -x + b$
- Они пересекаются в точке $((a - b) / 2, (a + b) / 2)$
- Отсюда видно, что точка пересечения целочисленная тогда и только тогда, когда a и b одной чётности

Решение

- Посчитаем количество прямых каждой чётности свободного члена по каждому направлению
- Тогда ответ представляется как сумма произведений чётных количеств и нечётных количеств

Обрати внимание

- ~~Сделано в Германии~~
- Ответ на задачу не помещается в 32-битном типе данных, поэтому требуется использовать 64-битные типы данных (long long, int64_t и другие).

Задача «Выращивание дерева»

Авторы задачи: Владимир Романов, Дмитрий Саютин
Разработчик: Александр Курилкин

Формальная постановка

- Дано n отрезков
- Их можно класть только вертикально или горизонтально
- Надо построить такую ломаную, что два отрезка не лежать подряд вертикально или горизонтально и конец максимально удален от начала

Для начала немного математики

- Пусть есть выражение $a^2 + b^2$, которое необходимо максимизировать, при этом $a + b = C$, где C - какая-то константа
- Докажем, что максимум $a^2 + b^2$ достигается, когда a или b максимально возможны

Для начала немного математики

- Пусть $a \geq b$
- Посмотрим, что произойдет, когда мы добавим 1 к a и вычтем 1 из b. $(a + 1)^2 + (b - 1)^2 = a^2 + 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 = a^2 + b^2 + 2(a - b + 1)$
- Так как $a \geq b$, это выражение строго больше $a^2 + b^2$, а значит, нам выгодно максимизировать a

Вернемся к задаче

- Заметим, что нам всегда выгодно растить дерево в одном направлении. Для определенности, горизонтальные звенья ломаной будут идти слева направо, а вертикальные - снизу вверх
- При таком подходе ответом является величина $(\text{сумма длин всех горизонтальных звеньев})^2 + (\text{сумма длин всех вертикальных звеньев})^2$

Вернемся к задаче

- Как мы доказали ранее, для максимизации этого выражения необходимо максимизировать одно из чисел под квадратом
- Отсортируем звенья по длине и половину с большей длиной (не забываем про серединный элемент, если звеньев нечетное число) ориентируем вертикально, а другие горизонтально
- Асимптотика: $O(n \log n)$

Задача «Черепашка» Div. B

Автор задачи: Владимир Романов
Разработчик: Дмитрий Саютин

Постановка задачи

- Расставить заданное число нулей и единиц в матрице 2 x n
- Минимизировать максимальный путь черепашки, которая может ходить только вправо и вниз

Идея

- Пусть k единиц, тогда заметим, что ответ хотя бы ceil(k / 2)
- Потому что по принципу Дирихле либо нижняя, либо верхняя строка таблички содержит больше половины единиц, и черепашка может проползти всю эту строку целиком

Идея 2

Если рассмотреть единички по диагонали, то любой путь собирает всего лишь одну из них

			1			
		1				

Решение

Расставим единицы парами по диагоналям:

Start		1	1	1		
	1	1	1			Fin

Если единиц нечётное число, поставим непарную в произвольное место

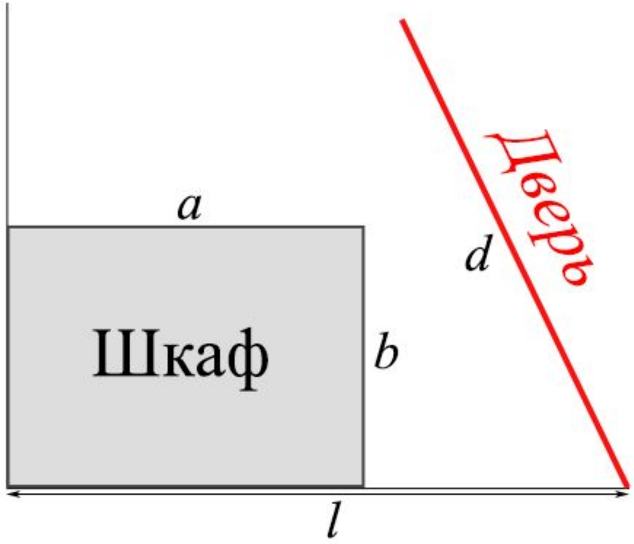
Если единиц слишком много, то придётся занять единицами S или T

Задача «Дорогой шкаф»

Автор задачи: Денис Кириенко
Разработчик: Грибов Филипп

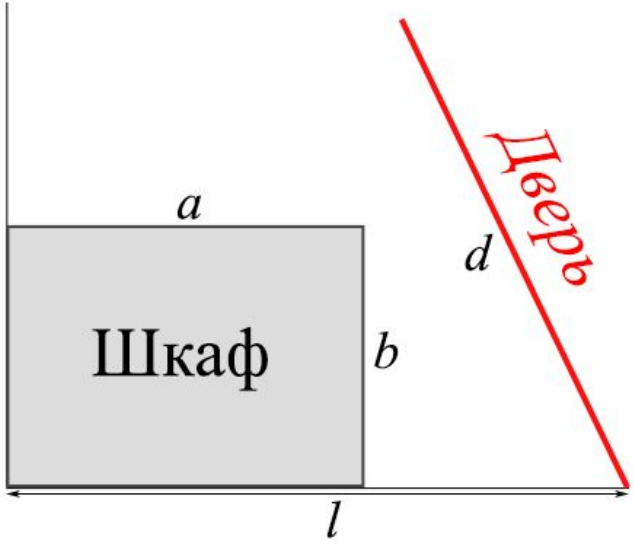
Формальная постановка

- В углу комнаты стоит шкаф размера a * b.
- На расстоянии l от угла стоит дверь длиной d
- Требуется узнать, может ли дверь при открытии задеть шкаф, или же она упрётся в стену



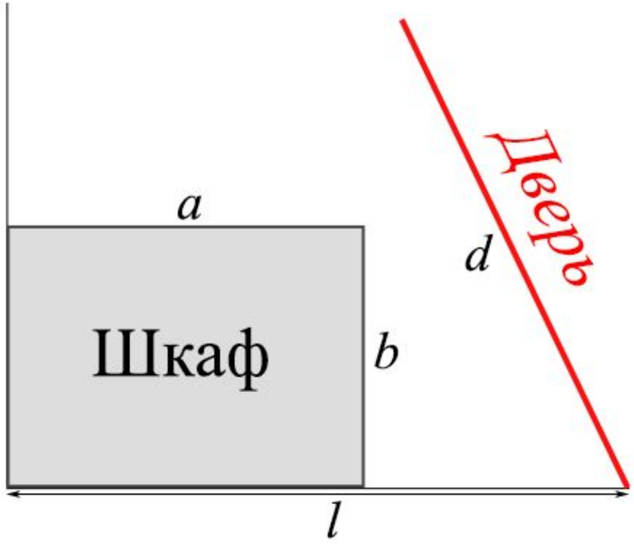
Решение

- Если дверь не заденет шкаф, то она может упереться в ближнюю или дальнюю стену
- Чтобы дверь упёрлась в ближнюю стену, сумма длин двери и шкафа должна быть меньше расстояния от шкафа до стены, т.е. $a + d < l$



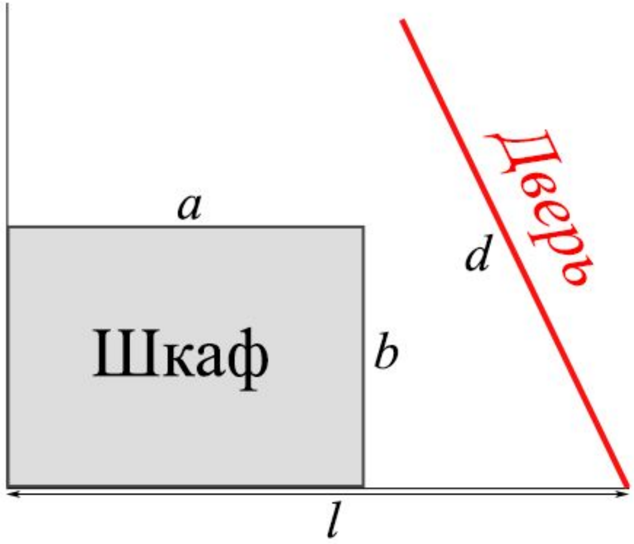
Решение

- Чтобы дверь упёрлась в дальнюю стену, надо, чтобы отрезок, выходящий из основания двери, проходящий через угол шкафа и заканчивающиеся на другой стене, имел длину меньше d



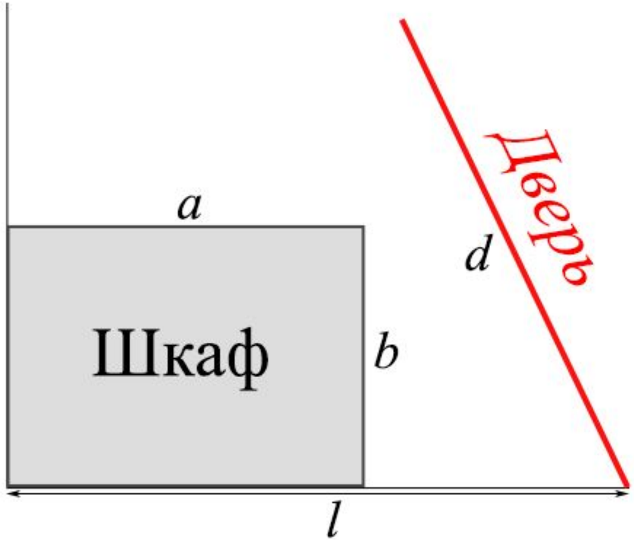
Решение

- По теореме Пифагора, длина отрезка от основания двери до угла шкафа равна sqrt((l - a)² + b²)
- Тогда длина этого отрезка, продлённого до стены, равна sqrt((l - a)² + b²) / (l - a) * l.
- Нам надо сравнить это с d

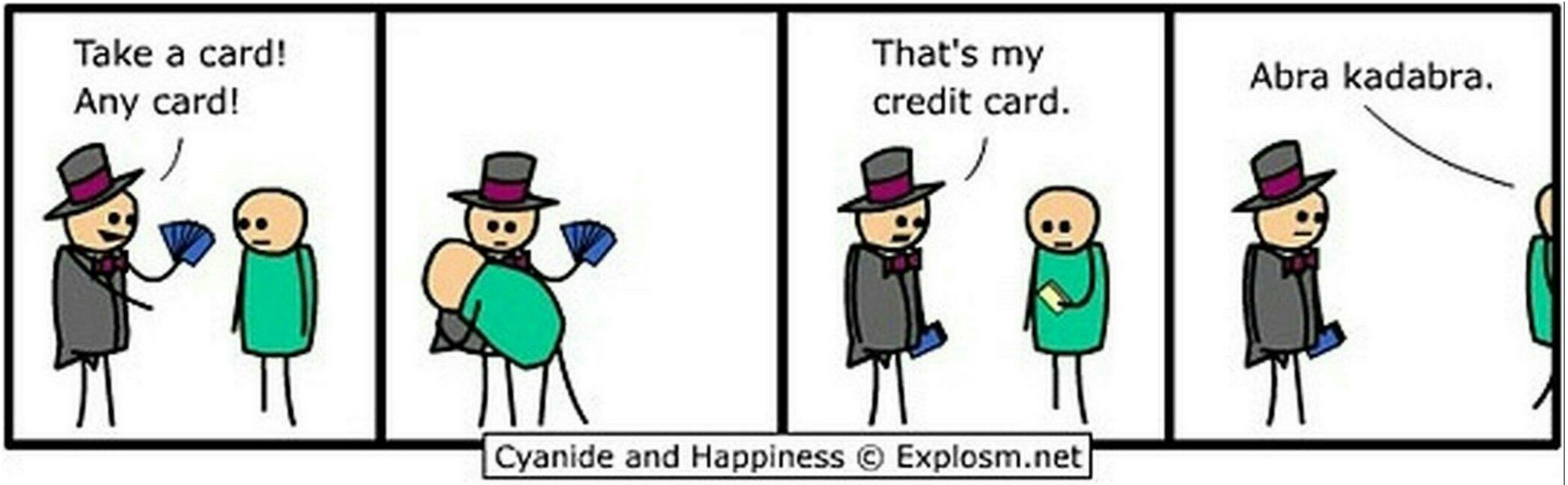


Решение

- Чтобы не было проблем с точностью, возведём обе части в квадрат и перенесём деление в другую сторону. Получим что надо сравнить $((l - a)^2 + b^2) * l^2$ и $d^2 * (l - a)^2$



Задача «Фокус с делением и умножением»



Автор и разработчик задачи: Иван Сафонов

Формальная постановка

- Есть массив различных целых чисел
- За одну операцию можно разделить нацело или умножить один элемент массива на целое число
- На каждое число нельзя умножать/делить больше одного раза
- За какое минимальное число операций можно сделать все числа равными?

Ключевая идея

- За n действий всегда можно сделать все числа равными
- Меньше чем за $n - 1$ нельзя
- Если хотим за $n - 1$ действие, то все числа надо сделать равными какому-то числу из массива
- Надо найти числа массива, такие что все остальные либо делятся на него, либо его делитель и проверять, можно ли все остальные свести к нему

Решение

- Рассмотрим позиции i, такие что $gcd(a[i+1], \ldots, a[n])$ делится на $a[i]$. Таких позиций не больше чем $\log(A)$.
- Каждую позицию можем проверить за $O(n \log n)$ или $O(n)$, проверив, что числа $(a[i] / a[1]), \ldots, (a[i] / a[i-1]), (a[i+1] / a[i]), \ldots, (a[n] / a[i])$ целые и различные.
- Хотя бы одна позиция подошла - ответ $n - 1$, иначе n
- Полученное решение работает за
  $O(n \log A \log n)$ или $O(n \log A)$

Задача «Дороги в стране»

Автор и разработчик задачи: Вячеслав Наймушин

Формальная постановка

- Задан взвешенный ориентированный граф
- Для каждой вершины требуется найти путь из неё в вершину 1, в котором минимальный вес ребра максимален

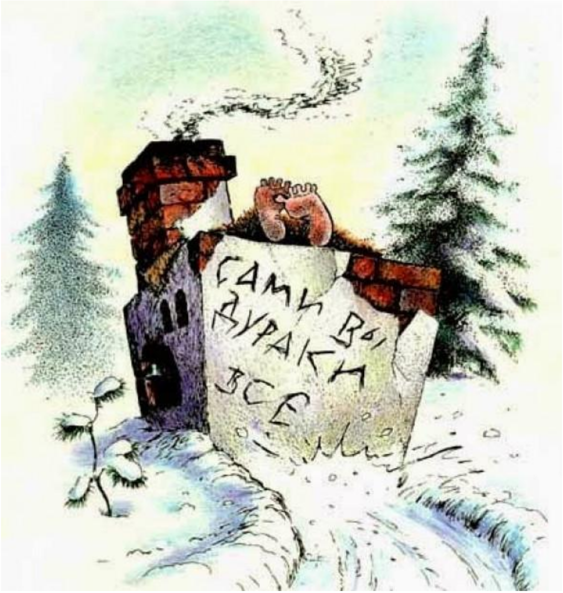
Решение

- Будем добавлять рёбра в порядке убывания веса и поддерживать ответы для всех вершин
- Изначально ответ для всех вершин не определён.
- Если добавленное ребро из A в B веса X, и для вершины B посчитан ответ, а для вершины A ответ не посчитан, то ответ для вершины A равен X

Решение

- Как только мы посчитали ответ для новой вершины, необходимо посмотреть на все ребра ведущие в нее (т.е. обратные ребра). Если ребро начинается из вершины, для которой ответ еще не был посчитан, то присваиваем ответ X и тоже смотрим на ребра ведущие в нее
- Таким образом каждое ребро “посчитано” дважды, а значит итоговая сложность $O(m \log m)$ на сортировку ребер и $O(m)$ на обходы вершин

Задача «Иванушка-дурачок и теория вероятностей»



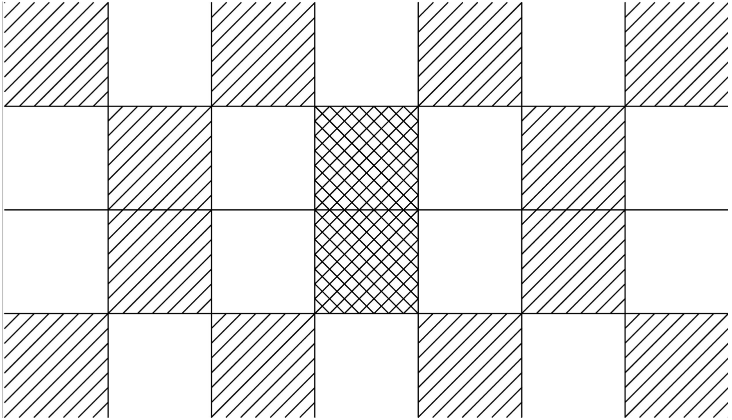
Автор и разработчик задачи: Владимир Романов

Формальная постановка

- Есть клетчатое поле n на m
- Нужно подсчитать число черно-белых раскрасок этого поля таких, что для любой клетки верно, что среди ее соседей по стороне не более одной клетки такого же цвета, что и она

Ключевая идея

- Пусть есть вертикальная одноцветная пара клеток



Тогда их соседи должны быть другого цвета. Аналогично соседи соседей и т. д.

Таким образом некоторые соседние строчки разбиваются на пары

Число способов разбить некоторые соседние строки на пары равно F_n

Решение

- Есть 2 варианта цвета угловой клетки
- Число способов разбить соседние строки на пары F_n
- Число способов разбить соседние столбцы на пары F_m
- Шахматная раскраска учитывается дважды
- Итоговый ответ $2(F_n + F_m - 1)$

Задача «Весь мир — задача по программированию»

Автор задачи: Григорий Резников
Разработчик: Максим Деб Натх

Формальная постановка

- Дана скобочная последовательность
- Разрешается поменять любые две скобки
- Хочется максимизировать число циклических сдвигов, являющихся правильными скобочными последовательностями (ПСП)

Общие замечания

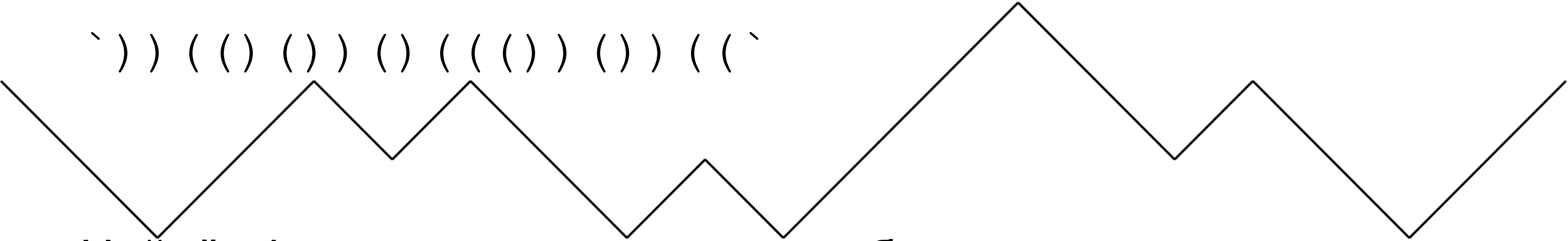
- Если число открывающих скобок не равно числу закрывающих, ответ всегда нулевой
- Ответ для скобочной последовательности совпадает с ответом для любого её циклического сдвига

Общие замечания

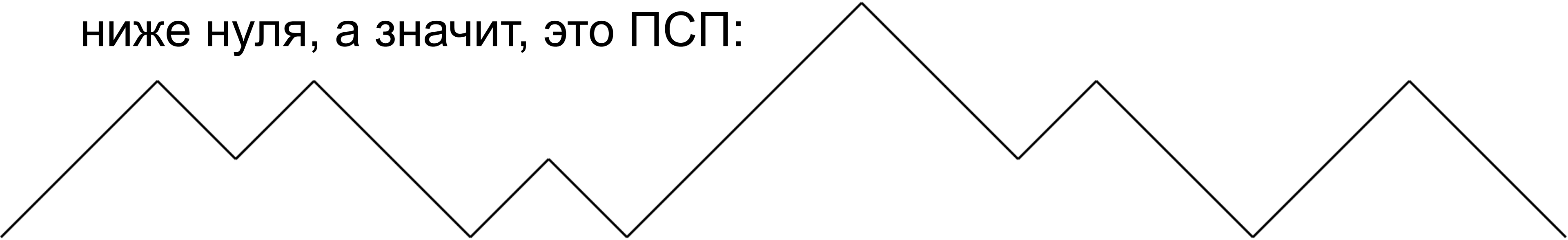
- Если число открывающих скобок равно числу закрывающих, существует циклический сдвиг, являющийся правильной скобочной последовательностью
- Префиксный баланс — разность числа открывающих и закрывающих скобок на префиксе.
- Изобразим на плоскости префиксные балансы скобочной последовательности в виде ломанной

Пример

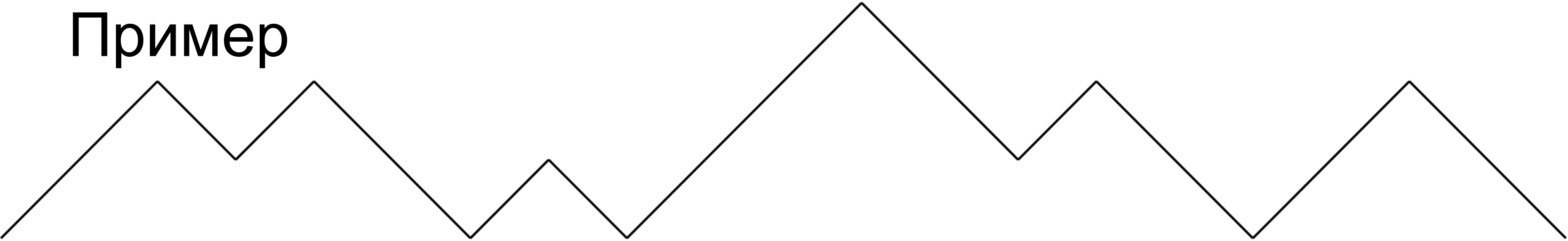
`))(()())()((())())((`



Найдём i — индекс минимального баланса и выполним циклический сдвиг строки на i влево. Полученная строка будет иметь такую ломанную. Её баланс никогда не становится ниже нуля, а значит, это ПСП:

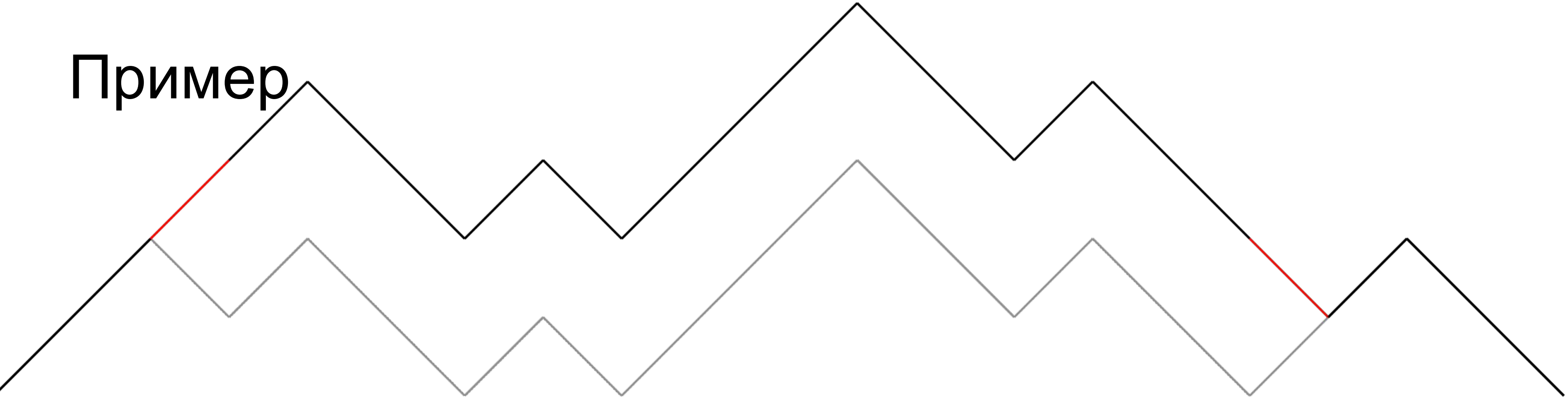


Пример



- Заметим, что ответ на вопрос о количестве циклических сдвигов-ПСП есть число минимальных балансов. В данном случае это число равно 4.
- Значит, достаточно минимизировать минимальный элемент, поменяв две какие-то скобки.
- Менять одинаковые скобки не имеет смысла. Значит, надо менять местами скобки разных типов.

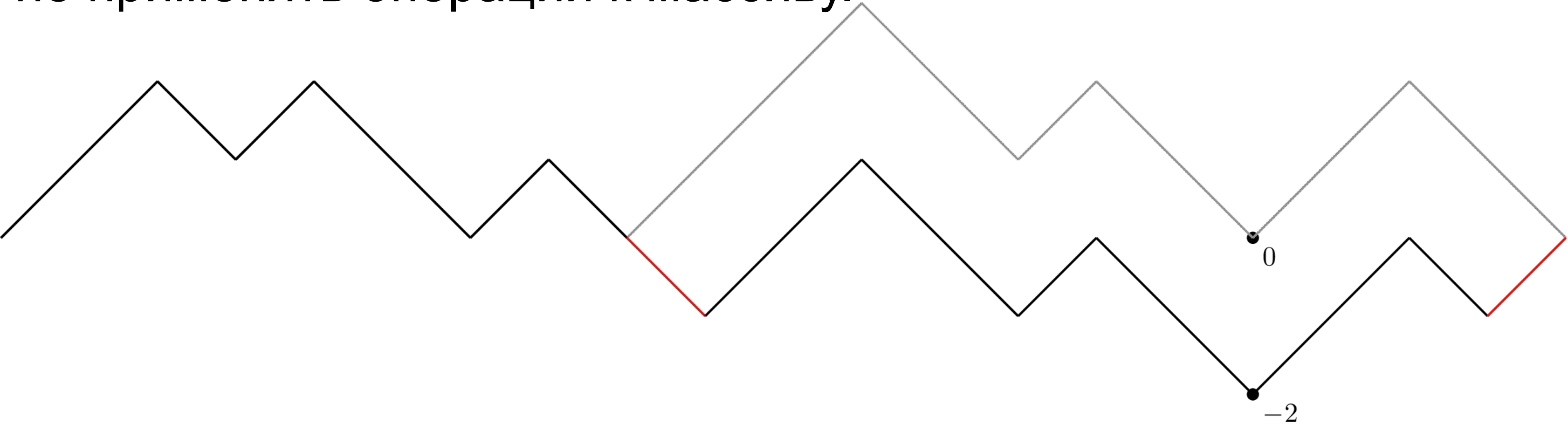
Пример



- Замена скобок \`)\` и \`(\` (именно в таком порядке следования) **прибавляет 2** на каком-то подотрезке префиксных балансов и не увеличивает число минимумов по сравнению с тем, что было. Минимум балансов как был, так и останется равен 0
- Замена скобок в обратном порядке (\`)\`, \`(\` даст **вычитание 2** на каком-то отрезке. После этой операции минимум мог остаться равным 0 или стать -1 или -2

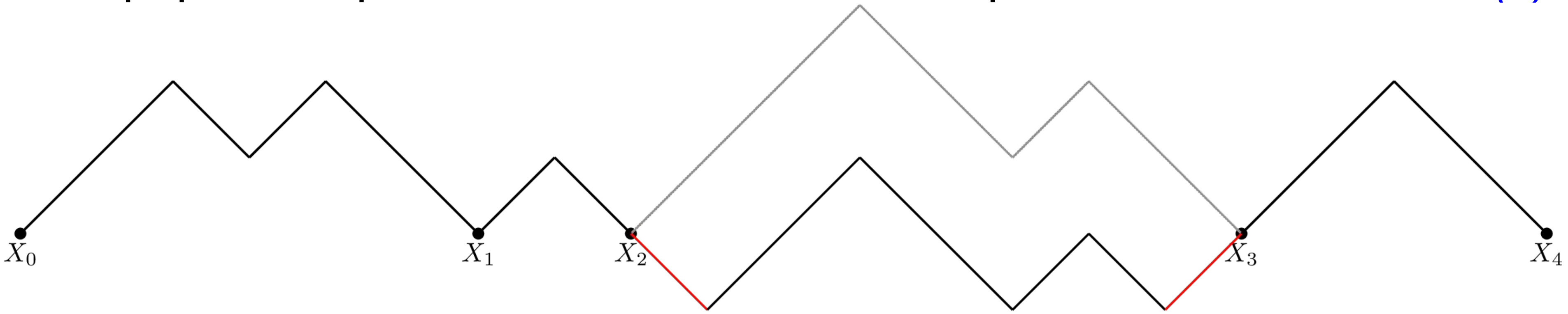
Случай 1: минимум стал равен -2

Минимум стал достигать значения равного -2 только в тех точках, в которых раньше было значение 0, поэтому этот ответ будет не лучше чем тот, что получился бы, если вообще не применять операции к массиву.



Случай 2: минимум стал равен -1

- Выделим X_0, …, X_k — все индексы минимумов. Тогда отрезок [L; R], на котором будет вычтена 2 не должен содержать точек X. Ответ будет равен числу точек, равных 1 на отрезке [L, R], значит, L надо сделать минимально возможной, а R — максимально возможной, то есть $[X_i;X_{i+1}-1]$ для какого-то i.
- Прорелаксировать ответ по всем таким решениям можно за *O(n)*



Случай 2: минимум стал равен 0

- Выделим $X_i = Y_0, \ldots, Y_m = X_{i+1}$ — все индексы балансов, равных 1, расположенных между двумя минимумами. Тогда отрезок [L; R], на котором будет вычтена 2 не должен содержать точек X, Y. Ответ будет равен числу точек, равных 2 на отрезке [L, R], значит, L надо сделать минимально возможной, а R — максимально возможной, то есть $[Y_i; Y_{i+1}-1]$ для какого-то i.
- Прорелаксировать ответ по всем таким решениям можно также за $O(n)$