**Задача F. Прямоугольные треугольники**

Автор задачи и разбора – М.М. Пядёркин

**Решение 1**

Обозначим данные прямоугольные треугольники с катетами, параллельными осям координат, через *A* и *B*. Если какая-нибудь вершина одного из них лежит внутри или на границе другого, то они очевидным образом пересекаются. Что делать, если этого не происходит?

**Геометрический факт.** Пусть *A* и *B* пересекаются, причем ни одна из вершин одного треугольника не находится внутри или на границе другого треугольника. Тогда у *A* и *B* пересекаются катеты.

**Доказательство.** Рассмотрим многоугольник *M*, образованный пересечением *A* и *B*. Его стороны – отрезки сторон наших треугольников. Его вершины не могут совпадать с вершинами *A* и *B*, следовательно, получаются только тремя способами:

1. Пересечением гипотенуз треугольников (их не может быть более одной).
2. Пересечением гипотенузы одного треугольника с катетом другого.
3. Пересечением катетов (нужно доказать их наличие в *M*).

Пусть в *M* нет ни одной вершины типа (2). Поскольку количество вершин у *M* не менее двух, то среди них гарантировано найдётся хотя бы одна типа (3).

Пусть в *M* имеется хотя бы одна вершина типа (2). Рассмотрим прилежащий к ней катет. На нём лежит ещё одна вершина многоугольника М. Очевидным образом она не может иметь типы (1) и (2). Следовательно, её тип (3).

Итак, существование вершины типа (3) доказано, что и требовалось. $ ∎$

Таким образом, решение данной задачи сводится к проверке принадлежности вершин каждого треугольника другому прямоугольному треугольнику, а также проверке пересечения катетов — горизонтальных и вертикальных отрезков.

1. Два горизонтальных катета пересекаются тогда и только тогда, когда *y*1=*y*2 и пересекаются отрезки $\left[x\_{1}, x\_{1}+a\_{1}\right]$ и $\left[x\_{2}, x\_{2}+a\_{2}\right]$ (важно помнить, что *a*1 и *a*2 не обязательно положительные). Аналогично с двумя вертикальными катетами.
2. Горизонтальный катет первого треугольника и вертикальный катет второго треугольника пересекаются тогда и только тогда, когда $x\_{2}\in \left[x\_{1}, x\_{1}+a\_{1}\right]$ и $y\_{1}\in \left[y\_{2}, y\_{2}+b\_{2}\right]$. Аналогично с горизонтальным катетом первого и вертикальным катетом второго треугольника.
3. Осталось понять, когда вершина второго треугольника лежит внутри первого треугольника. Это следует проверять только в том случае, если первый треугольник невырожденный, т.е. *a*1 ≠ 0 и *b*1 ≠ 0, в противном случае все случаи пересечения покрываются первыми двумя пунктами. Если *a*1 < 0, отразим все относительно оси ординат. Если *b*1 < 0, отразим все относительно оси абсцисс. Также для удобства выполним параллельный перенос: сдвинем вершины обоих треугольников на вектор (*x*1, *y*1). Очевидно, что взаимное расположение треугольников не меняется, однако случаев стало гораздо меньше: вершина прямого угла первого треугольника теперь расположена в начале координат, и первый треугольник имеет строго определенный вид:

Легко убедиться в том, что точка (*x*, *y*) принадлежит первому треугольнику тогда и только тогда, когда выполнены три условия: *x* ≥ 0, *y* ≥ 0 и $b\_{1}x+a\_{1}y-a\_{1}b\_{1}\leq 0$ (последнее условие гарантирует расположение точки не выше гипотенузы). Обратите внимание, э*то верно только когда первый треугольник не вырожден.* После проверки всех трех вершин второго треугольника на принадлежность первому нужно поменять треугольники ролями и выполнить пункт еще раз.

*Несмотря на простоту реализации данного решения (см. решение жюри), многие команды не обращали внимания на то, что треугольники прямоугольные и их катеты параллельны осям координат, т.е. решали задачу в общем случае.*

**Решение 2**

Решим задачу в общем случае: проверим, пересекаются ли два произвольных треугольника. Это происходит, если выполнено хотя бы одно из двух условий:

1. Одна из вершин треугольника лежит внутри другого треугольника. Чтобы проверить, лежит ли точка *p* внутри треугольника, достаточно проверить, что для каждой стороны *p*1*p*2 точка *p* лежит по ту же сторону, что и оставшаяся вершина *p*3.
2. Одна из сторон одного треугольника пересекается со стороной другого треугольника. Таким образом, нужно проверить пересечение двух отрезков *p*1*p*2 и *p*3*p*4 на плоскости.

Способ проверки пересечения отрезков, а также много другой полезной информации о вычислительной геометрии можно найти в статье Е. В. Андреевой «Вычислительная геометрия на плоскости» <http://informatics.mccme.ru/moodle/file.php/22/part2.pdf>.