**Задача E. Подтасовка результатов**

Автор задачи – Е.В. Андреева, автор разбора – М.М. Пядёркин

Обозначим за *Ai* – участника, занявшего *i*-ое место в первом туре, а за *Bi*- участника, занявшего *i*-ое место во втором туре. Пусть *x* и *y* – места Васи в первом и втором турах, соответственно (т.е. *Ax*=*By*=1). Таблицу с суммами баллов для каждого участника будем называть *итоговой*.

Назовем *i*-ым *делением* тура с порядком следования участников *C*1, *C*2, …, *CN*такую расстановку баллов, при которой участники *C*1, *C*2, …, *Ci* получают баллы 400, 399, 398, …, *400*-*i*+*1*, а участники *Ci*+1, *Ci*+2, …, *CN*получают баллы *N*-*i*, *N*-*i*-*1*, …, *1*.

Примеры делений тура (*N*=4):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *0-деление* (*i*=0) | *2-деление (i=2)* | *4-деление (i=4)* |
| Участник | Баллы | Участник | Баллы | Участник | Баллы |
| *C*1 | 4 | *C*1 | 4*00* | *C*1 | 4*00* |
| *C2* | 3 | *C2* | 3*99* | *C2* | 3*99* |
| *C3* | 2 | *C3* | 2 | *C3* | *398* |
| *C4* | 1 | *C4* | 1 | *C4* | *397* |

На странице 4 вы можете найти само решение данной задаче, с этого места и далее будет следовать доказательство корректности.

***Утверждение 1.*** Рассмотрим *s*-деление первого тура и *t*-деление второго тура, причем *s≥x, t≥y*. Тогда участники с номерами *As+1, As+2*, …, *AN*, *Bt*+1, *Bt*+2, …, *BN* имеют сумму баллов строго меньше, чем у Васи.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 тур (*x*=2, *s*=3≥*x*) | 2 тур (*y*=4, *t*=4≥*y*) | Сумма |
| Участник | Баллы | Участник | Баллы | Участник | Сумма |
| Костя | 400 | Оля | 400 | Лена | 797 |
| Вася | 399 | Лена | 399 | Вася | 796 |
| Лена | 398 | Петя | 398 | Костя | 401 |
| Петя | 2 | Вася | 397 | Оля | 401 |
| Оля | 1 | Костя | 1 | Петя | 400 |

**Доказательство.** Достаточно доказать данное утверждение для первого тура, для второго тура доказательство симметрично. Заметим, что баллы в первом туре участника с номером *Ak*, *k*>*s*, не превосходят *n*-*s* (по определению *s*-деления), а *n*-*s*≤*n*-*x* (т.к. *s*≥*x*). Следовательно, сумма баллов участника *Ak* не превосходит *n-x*+400. Сумма баллов Васи (по определению *s*-деления и т.к. *s*≥*x*) равна 400-*x*+1+400-*y*+1 > 400-*x*+*n* (т.к. *y≤n*≤200). Таким образом, сумма баллов Васи больше суммы баллов *Ak*.

***Утверждение 2.*** Пусть *s*>*x*, *t*≥*y*. Рассмотрим расстановку баллов, соответствующую *s*-1 делению первого тура и *t*-делению второго тура. Пусть при такой расстановке баллов в таблице результатов по сумме двух туров Вася занимает некоторое место *p*. При расстановке баллов, соответствующей *s*-1 делению в первом туре, и *t*-делению во втором туре, Вася занимает либо место *p*, либо место *p*-1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 тур (*x*=2, *s*=3>*x*) | 2 тур (*y*=4, *t*=4≥*y*) | Сумма |
| Участник | Баллы | Участник | Баллы | Участник | Сумма |
| Костя | 400 | Оля | 400 | Лена | 797 |
| Вася | 399 | Лена | 399 | Вася | 796 |
| Лена | 398 | Петя | 398 | Оля | 401 |
| Петя | 2 | Вася | 397 | Костя | 401 |
| Оля | 1 | Костя | 1 | Петя | 400 |

У нас второе место. Переходим к *s*-1 делению в первом туре.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 тур (*s*-1=2) | 2 тур (*t*=4) | Сумма |
| Участник | Баллы | Участник | Баллы | Участник | Сумма |
| Костя | 400 | Оля | 400 | Вася | 796 |
| Вася | 399 | Лена | 399 | Лена | 402 |
| Лена | 3 | Петя | 398 | Оля | 401 |
| Петя | 2 | Вася | 397 | Костя | 401 |
| Оля | 1 | Костя | 1 | Петя | 400 |

Изменились баллы Лены, она была выше Васи, а стала ниже, следовательно, Вася поднялисся на одно место и сейчас он занимает первое.

**Доказательство.** Заметим, что эти два деления отличаются лишь баллами участника *As* в первом туре. Если в *s*-делении участник *As* был хуже Васи, то Васино место не изменится (т.к. участник *As* и остался хуже Васи). Если же он был лучше, то Васино место уменьшится на один (т.к. участник *As* стал хуже Васи).

***Утверждение 3.*** Рассмотрим расстановку баллов, соответствующую *x*-делению первого тура и *y*-делению второго тура. Тогда полученная расстановка баллов гарантирует Васе наилучшее возможное место (то есть минимальное), обозначим его *Best*.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 тур (*s*=*x*=2) | 2 тур (*t*=*y=4*) | Сумма |
| Участник | Баллы | Участник | Баллы | Участник | Сумма |
| Костя | 400 | Оля | 400 | Вася | 796 |
| Вася | 399 | Лена | 399 | Лена | 402 |
| Лена | 3 | Петя | 398 | Оля | 401 |
| Петя | 2 | Вася | 397 | Костя | 401 |
| Оля | 1 | Костя | 1 | Петя | 400 |

Оптимальная расстановка баллов. Решение задачи для лиги «*B*». Все, кто были ниже Васи хотя бы в одном из туров, теперь ниже Васи и по сумме.

**Доказательство.** Предположим, что существует другая расстановка баллов (будем называть ее *новой*), при которой Васино место строго меньше. Тогда существует участник, стоящий в текущей расстановке выше (то есть имеет меньшее место) Васи, а в новой – ниже Васи (то есть имеет большее место). Т.к. в новой расстановке он находится ниже Васи, то это значит, что он находится ниже Васи хотя бы в одном из туров. Но тогда по утверждению 1 в текущей расстановке он имеет сумму баллов, меньшую чем Вася. Противоречие.

***Утверждение 4.*** Рассмотрим *n*-деление первого тура и *n*-деление второго тура. Пусть по сумме баллов Вася занимает место *p*, и пусть *p*≥*q*≥*Best*. Тогда существует расстановка баллов, гарантирующая Васе место *q* в итоговой таблице.

**Доказательство.** Будем смещать деления (переходить от *s*-деления первого тура к *s*-1-делению первого тура или переходить от *t*-деления второго тура к *t*-1 делению второго тура), пока *s*>*x* или *t*>*y*. В конце процесса мы получаем *x*-деление в первом туре и *y*-деление во втором туре, то есть минимально возможное место. Так как по утверждению 3 Васино место изменяется при каждом переходе не более чем на 1, то место в итоговой таблице будет пробегать все возможные значения от *p* до минимально возможного места.

Сформулируем теперь симметричные утверждения, все они доказываются аналогично.

***Утверждение 1’.*** Рассмотрим *s*-деление первого тура и *t*-деление второго тура, причем *s*≤*x*-1, *t*≤*y*-1. Тогда участники с номерами *A*1, *A*2, …, *As*, *B*1, *B*2, …, *Bt* имеют сумму баллов строго больше, чем у Васи.

***Утверждение 2’.*** Пусть *s*<*x*-1, *t*≤*y*-1. Рассмотрим расстановку баллов, соответствующую *s*-делению первого тура и *t*-делению второго тура. Пусть при такой расстановке баллов в таблице результатов по сумме двух туров мы занимаем некоторое место *p*. При расстановке баллов, соответствующей *s*+1 делению в первом туре, и *t*-делению во втором туре, мы занимаем либо место *p*, либо место *p*+1.

***Утверждение 3’.*** Рассмотрим расстановку баллов, соответствующую (*x*-1)-делению первого тура и (*y*-1)-делению второго тура. Тогда полученная расстановка баллов гарантирует Васе наихудшее возможное место (то есть максимальное), обозначим его *Worst.*

***Утверждение 4’.*** Рассмотрим 0-деление первого тура и 0-деление второго тура. По сумме баллов мы занимаем место *p*, то же самое, что и в утверждении 4. Пусть *p*≤*q*≤*Worst*. Тогда существует расстановка баллов, гарантирующая Васе место *q* в итоговой таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 тур (*s*=0) | 2 тур (*t=0*) | Сумма |
| Участник | Баллы | Участник | Баллы | Участник | Сумма |
| Костя | *5* | Оля | *5* | Лена | *7* |
| Вася | *4* | Лена | *4* | Вася | *6* |
| Лена | *3* | Петя | *3* | *Костя* | 6 |
| Петя | 2 | Вася | *2* | Оля | 6 |
| Оля | 1 | Костя | 1 | Петя | 5 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 тур (*s*=*n*) | 2 тур (*t=n*) | Сумма |
| Участник | Баллы | Участник | Баллы | Участник | Сумма |
| Костя | 400*=5+395* | Оля | *400=5+395* | Лена | *797=7+2\*395* |
| Вася | *399=4+395* | Лена | *399=4+395* | Вася | *796=6+2\*395* |
| Лена | *398=3+395* | Петя | *398=3+395* | *Костя* | *796=6+2\*395* |
| Петя | *397=2+395* | Вася | *397=2+395* | Оля | *796=6+2\*395* |
| Оля | *396=1+395* | Костя | *396=1+395* | Петя | *795=5+2\*395* |

Заметим, что таблицы различаются лишь сдвигом, поэтому место не меняется

Таким образом, для любого *q*, *Best*≤*q*≤*Worst* (очевидно, что для *q* не лежащего в данных пределах ответ «*Impossible*») существует расстановка баллов, гарантирующая Васе место *q* в итоговой таблице, причем ответ может иметь вид *s*-деления первого тура, и *t*-деления второго тура для некоторых *s* и *t*. Исходя из вышесказанного, мы можем сформулировать алгоритм решения данной задачи:

1. Перебрать *s*, от 0 до *n*
2. Перебрать *t,* от 0 до *n*
3. Рассмотреть расстановку баллов первого тура, соответствующую *s*-делению, и расстановку баллов второго тура, соответствующую *t*-делению. Построить итоговую таблицу.
4. Проверяем место Васи в полученной итоговой таблице: если оно равно необходимому, то выводим ответ.
5. Если ни для каких *s* и *t* ответ не был найден, то ответ *Impossible*.

Приведенная ниже реализация данного алгоритма работает за *O*(*N*^3).

*#include <stdio.h>*

*const int PMAX=400;*

*const int N=200;*

*int res[N][2], p[N][2], n, a;*

*int* *get*() //вычисление места при заданной расстановке баллов, Вася – номер 0

*{*

 *int r=0;*

 *for(int i=0; i<n; ++i)*

 *if(res[i][0]+res[i][1]>res[0][0]+res[0][1]) r++;*

 *return r;*

*}*

*int main()*

*{*

 *freopen("juggling.in", "r", stdin);*

 *freopen("juggling.out", "w", stdout);*

 *scanf("%d%d", &n, &a); a--;*

 *for(int j=0; j<2; ++j)*

 *for(int i=0; i<n; ++i)*

{

 *scanf*("%*d*", &*p*[*i*][*j*]);

 *p*[*i*][*j*]--; //обратите внимание, нумерация идет с 0!

 *}*

 *for(int i=0; i≤n; ++i)*

{

 //построение *i*-деления первого тура

 *int* *pts*=*PMAX*;

 *for(int j=0; j<i; ++j)*

 *res[p[j][0]][0]=pts, pts--;*

 *pts=n-i;*

 *for(int j=i; j<n; ++j)*

 *res[p[j][0]][0]=pts, pts--;*

 *for(int j=0; j≤n; ++j)*

{

 //построение *j*-деления второго тура

 *pts*=*PMAX*;

 *for(int k=0; k<j; ++k)*

 *res[p[k][1]][1]=pts, pts--;*

 *pts=n-j;*

 *for(int k=j; k<n; ++k)*

 *res[p[k][1]][1]=pts, pts--;*

 *if*(*get*()==*a*) //ура, мы нашли ответ!

 *{*

 *printf("Possible\n");*

 *for(int t=0; t<2; ++t)*

 *{*

 *for(int k=0; k<n; ++k)*

 *printf("%d ", res[p[k][t]][t]);*

 *printf("\n");*

 *}*

 *return 0;*

 *}*

 *}*

 *}*

 *printf("Impossible\n");*

 *return* 0;

}

Заметим, что переходя от деления к соседнему, мы можем «на лету» пересчитывать наше место. Данное замечание позволяет ускорить алгоритм до *O*(*N*). Желающие смогут посмотреть реализацию в архиве жюри.