Още едно n-мерно шоколадче

За A обозначим максимальное значение a_i

Для начала решим задачу за $O(n \cdot k \cdot f(k, A))$ с помощью динамического программирования.

Положим $dp[i][j]$ - максимальный возможный объем наименьшего кусочка, если по первым i измерениям мы разделили шоколадку на j частей. Если мы разделили более чем на k частей, так же положим результат в $dp[i][k]$. В пересчете нам нужно решить на сколько часей делить шоколадку вдоль очередного измерения. Рассмотрим несколько способов это сделать.

- Можно за $O(k)$ перебрать состояние, в которое переходим, и из этого посчитать на сколько частей нужно разделить шоколадку вдоль очередного измерения. - Получим $O(n \cdot k^2)$

- Можно за $O(A)$ перебрать на сколько частей мы делим шоколадку вдоль очередного измерения.

- Находясь в состоянии $dp[i][j]$, можно перебирать b_i - на сколько частей делить шоколадку, пока $j \cdot b_i \leq k$. Можно показать, что такое решение будет работать за $O(n \cdot k \cdot \ln k)$

Ключевая идея

- предположим нам нужно разделить шоколадку на 10 частей, и вдоль первых измерений мы уже разделили её на 5 частей, или на 6 частей, или на $7, 8$ или 9 частей. Все эти состояния не различимы для нас, потому что во всех этих случаях нам нужно разделить шоколадку ещё хотя бы на 2 части. Осталось понять сколько всего таких «интересных» состояний и научиться их хранить. Для этого есть несколько подходов, разберем один из них:

- нам интересны все значения $\lceil \frac{k}{i} \rceil$ для $i = 1, 2, \dots k$ - это то, на сколько частей ещё может быть нужно разделить шоколадку. Среди них всего $O(\sqrt{k})$ различных, так как либо $i \leq \sqrt{k}$, либо само значение $\lceil \frac{k}{i} \rceil \leq \sqrt{k}$. Если сделать все эти числа состояниями, и пересчитываться, перебирая состояние, в которое переходить, получим $O(n \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{k}) = O(n \cdot k)$ - этого всё ещё не достаточно, чтобы решить полую задачу.

Последнее наблюдение

Если мы находимся в состоянии $dp[i][remain]$ где $remain = \lceil \frac{k}{i} \rceil$ для какого-то i - применим к нему ту же идею. Из него нам интересны переходы в состояния $\lceil \frac{remain}{j} \rceil$ для $j = 1, 2, \dots remain$. Какая асимптотика получится, если перебирать только интересные переходы?

$$n \cdot (\sum_{r=1}^{\sqrt{k}} 2 \cdot \sqrt{r} + 2 \cdot \sqrt{\lceil \frac{k}{r} \rceil})$$

- можно показать, что это $O(n \cdot k^{3/4})$ - что решает задачу