Краткий разбор задач второго тура

Задача A. Подмножество

Автор задачи и разбора — Я. Длугач

Разобьём все числа от 1 до N на “классы” — два числа будут в одном классе, если они отличаются на степень двойки. Довольно легко доказать, что если в классе K элементов, то из него можно взять не больше $(K+1)/2$ элементов в результирующее множество (иначе войдут два соседних). Таким образом становится понятно, что можно брать в множество числа вида $(2a+1)\cdot 2^{2b+1}$ — нечётное число, помноженное на 2 в нечётной степени. Осталось только посчитать количество таких чисел в промежутке от 1 до N:

$$\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{\lfloor N/4 \rfloor}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{\lfloor N/16 \rfloor}{2} \right\rceil + \dots$$

Это и будет ответом.

Задача B. Восстановление графа

Автор задачи и разбора — А. Лахно

Элемент таблицы кратчайших расстояний, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен сумме весов рёбер, входящих в кратчайший путь между i-й и j-й вершинами. Таким образом, все диагональные элементы таблицы кратчайших расстояний равны нулю, а каждый недиагональный элемент является либо весом одного ребра (в случае если соответствующий кратчайший путь состоит из одного ребра), либо равен сумме весов нескольких рёбер. Если ребро лежит на кратчайшем пути между некоторой парой вершин, то его вес обязательно входит в таблицу кратчайших расстояний в явном виде.

Рассмотрим граф G из N изолированных вершин. Соответствующая ему таблица кратчайших расстояний $B = \{b_{ij}\}$ имеет вид: $b_{ii} = 0$ и $b_{ij} = \infty$, $i \neq j$. Отсортируем рёбра множества $E = \{(i, j, a_{ij})\}$ в порядке возрастания весов. Последовательно просматривая элементы $e = (i, j, a_{ij})$ множества E, будем добавлять рёбра в граф G. Если $a_{ij} < b_{ij}$, включаем ребро e в G, иначе переходим к следующему элементу E. При добавлении в граф ребра обновляем таблицу кратчайших расстояний: $b_{st} := min(b_{st}, b_{si} + a_{ij} + b_{jt}, b_{sj} + a_{ji} + b_{it})$, $s, t = 1 \dots N$.

Получившаяся в результате таблица кратчайших расстояний $B = \{b_{ij}\}$ должна совпадать с таблицей, приведённой во входных данных $A = \{a_{ij}\}$. Если это так, то G является искомым графом. При реализации необходимо учитывать, что в графе G должно быть ровно M рёбер. Во-первых, это означает, что в G можно добавить не более M рёбер. Во-вторых, если после выполнения вышеописанной процедуры построения G в нём оказалось менее M рёбер, то его необходимо дополнить рёбрами, не изменяющими таблицу кратчайших расстояний B.

Задача C. Дракончики

Автор задачи и разбора — Б. Василевский

Перенесём условие задачи на двудольный граф, первая доля которого соответствует зелёным дракончикам, а второая — жёлтым. Тех дракончиков, которые **не** могут ужиться вместе, соединим ребром. Добавим к этому всему ещё $M + K - 2N$ вершин, обозначающих одноместные аквариумы (граф перестанет быть двудольным) и проведём ребра между ними и всеми дракончиками, не переносящими одиночества.

Задачу теперь можно переформулировать так: разбить всё множество вершин данного графа на пары так, чтобы никакие две вершины из одной пары не были соединены ребром. Инвертируем рёрба (там, где не было ребра — теперь есть, и наоборот) и получим задачу о паросочетании в новом графе G. Остаётся сделать из него двудольный.

Заметим, что ответ на вопрос задачи положительный только в том случае, если в G существует совершенное паросочетание (покрывающее все вершины). В этом случае для зелёных дракончиков будет отведено ровно $K - N$ одноместных аквариумов, а для жёлтых — $M - N$. Поскольку одноместные аквариумы неразличимы между собой, то $K-N$ из них определим в правую долю (то есть все ребра между ними и вершинами правой доли удалим), а $M - N$ — в левую. Полученный граф обозначим G'.

Итак, ответ на первоначальную задачу существует тогда и только тогда, когда в G' существует совершенное паросочетание. Распределение дракончиков по двухместным аквариумам просто восстанавливается по найденному паросочетанию.