Задача F. Прямоугольные треугольники

Автор задачи и разбора – М.М. Пядёркин

Решение 1

Обозначим данные прямоугольные треугольники с катетами, параллельными осям координат, через A и B. Если какая-нибудь вершина одного из них лежит внутри или на границе другого, то они очевидным образом пересекаются. Что делать, если этого не происходит?

Геометрический факт. Пусть A и B пересекаются, причем ни одна из вершин одного треугольника не находится внутри или на границе другого треугольника. Тогда у A и B пересекаются катеты.

Доказательство. Рассмотрим многоугольник M, образованный пересечением A и B. Его стороны – отрезки сторон наших треугольников. Его вершины не могут совпадать с вершинами A и B, следовательно, получаются только тремя способами:

1. Пересечением гипотенуз треугольников (их не может быть более одной).
2. Пересечением гипотенузы одного треугольника с катетом другого.
3. Пересечением катетов (нужно доказать их наличие в M).

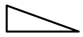
Пусть в M нет ни одной вершины типа (2). Поскольку количество вершин у M не менее двух, то среди них гарантировано найдётся хотя бы одна типа (3).

Пусть в M имеется хотя бы одна вершина типа (2). Рассмотрим прилежащий к ней катет. На нём лежит ещё одна вершина многоугольника M. Очевидным образом она не может иметь типы (1) и (2). Следовательно, её тип (3).

Итак, существование вершины типа (3) доказано, что и требовалось. ■

Таким образом, решение данной задачи сводится к проверке принадлежности вершин каждого треугольника другому прямоугольному треугольнику, а также проверке пересечения катетов — горизонтальных и вертикальных отрезков.

1. Два горизонтальных катета пересекаются тогда и только тогда, когда y_1=y_2 и пересекаются отрезки $[x_1, x_1 + a_1]$ и $[x_2, x_2 + a_2]$ (важно помнить, что a_1 и a_2 не обязательно положительные). Аналогично с двумя вертикальными катетами.
2. Горизонтальный катет первого треугольника и вертикальный катет второго треугольника пересекаются тогда и только тогда, когда $x_2 \in [x_1, x_1 + a_1]$ и $y_1 \in [y_2, y_2 + b_2]$. Аналогично с горизонтальным катетом первого и вертикальным катетом второго треугольника.
3. Осталось понять, когда вершина второго треугольника лежит внутри первого треугольника. Это следует проверять только в том случае, если первый треугольник невырожденный, т.е. $a_1 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$, в противном случае все случаи пересечения покрываются первыми двумя пунктами. Если $a_1 < 0$, отразим все относительно оси ординат. Если $b_1 < 0$, отразим все относительно оси абсцисс. Также для удобства выполним параллельный перенос: сдвинем

вершины обоих треугольников на вектор (x_1, y_1). Очевидно, что взаимное расположение треугольников не меняется, однако случаев стало гораздо меньше: вершина прямого угла первого треугольника теперь расположена в начале координат, и первый треугольник имеет строго определенный вид: 

Легко убедиться в том, что точка (x, y) принадлежит первому треугольнику тогда и только тогда, когда выполнены три условия: $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $b_1 x + a_1 y - a_1 b_1 \leq 0$ (последнее условие гарантирует расположение точки не выше гипотенузы). Обратите внимание, э*то верно только когда первый треугольник не вырожден.* После проверки всех трех вершин второго треугольника на принадлежность первому нужно поменять треугольники ролями и выполнить пункт еще раз.

Несмотря на простоту реализации данного решения (см. решение жюри), многие команды не обращали внимания на то, что треугольники прямоугольные и их катеты параллельны осям координат, т.е. решали задачу в общем случае.

Решение 2

Решим задачу в общем случае: проверим, пересекаются ли два произвольных треугольника. Это происходит, если выполнено хотя бы одно из двух условий:

1. Одна из вершин треугольника лежит внутри другого треугольника. Чтобы проверить, лежит ли точка p внутри треугольника, достаточно проверить, что для каждой стороны p_1p_2 точка p лежит по ту же сторону, что и оставшаяся вершина p_3.
2. Одна из сторон одного треугольника пересекается со стороной другого треугольника. Таким образом, нужно проверить пересечение двух отрезков p_1p_2 и p_3p_4 на плоскости.

Способ проверки пересечения отрезков, а также много другой полезной информации о вычислительной геометрии можно найти в статье Е. В. Андреевой «Вычислительная геометрия на плоскости» http://informatics.mccme.ru/moodle/file.php/22/part2.pdf.