

Задача Е. Подтасовка результатов

Автор задачи – Е.В. Андреева, автор разбора – М.М. Пядёркин

Обозначим за A_i – участника, занявшего i -ое место в первом туре, а за B_i – участника, занявшего i -ое место во втором туре. Пусть x и y – места Васи в первом и втором турах, соответственно (т.е. $A_x=B_y=1$). Таблицу с суммами баллов для каждого участника будем называть итоговой.

Назовем i -ым делением тура с порядком следования участников $C_1, C_2, \dots, C_N$ такую расстановку баллов, при которой участники $C_1, C_2, \dots, C_i$ получают баллы $400, 399, 398, \dots, 400-i+1$, а участники $C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_N$ получают баллы $N-i, N-i-1, \dots, 1$.

Примеры делений тура ($N=4$):

0-деление ($i=0$)		2-деление ($i=2$)		4-деление ($i=4$)	
Участник	Баллы	Участник	Баллы	Участник	Баллы
C_1	4	C_1	400	C_1	400
C_2	3	C_2	399	C_2	399
C_3	2	C_3	2	C_3	398
C_4	1	C_4	1	C_4	397

На странице 4 вы можете найти само решение данной задаче, с этого места и далее будет следовать доказательство корректности.

Утверждение 1. Рассмотрим s -деление первого тура и t -деление второго тура, причем $s \geq x$, $t \geq y$. Тогда участники с номерами $A_{s+1}, A_{s+2}, \dots, A_N, B_{t+1}, B_{t+2}, \dots, B_N$ имеют сумму баллов строго меньше, чем у Васи.

1 тур ($x=2, s=3 \geq x$)		2 тур ($y=4, t=4 \geq y$)		Сумма	
Участник	Баллы	Участник	Баллы	Участник	Сумма
Костя	400	Оля	400	Лена	797
Вася	399	Лена	399	Вася	796
Лена	398	Петя	398	Костя	401
Петя	2	Вася	397	Оля	401
Оля	1	Костя	1	Петя	400

Доказательство. Достаточно доказать данное утверждение для первого тура, для второго тура доказательство симметрично. Заметим, что баллы в первом туре участника с номером A_k , $k > s$, не превосходят $n-s$ (по определению s -деления), а $n-s \leq n-x$ (т.к. $s \geq x$). Следовательно, сумма баллов участника A_k не превосходит $n-x+400$. Сумма баллов Васи (по определению s -деления и т.к. $s \geq x$) равна $400-x+1+400-y+1 > 400-x+n$ (т.к. $y \leq n \leq 200$). Таким образом, сумма баллов Васи больше суммы баллов A_k .

Утверждение 2. Пусть $s > x$, $t \geq y$. Рассмотрим расстановку баллов, соответствующую $s-1$ делению первого тура и t -делению второго тура. Пусть при такой расстановке баллов в таблице результатов по сумме двух туров Вася занимает некоторое место p . При расстановке баллов, соответствующей $s-1$ делению в первом туре, и t -делению во втором туре, Вася занимает либо место p , либо место $p-1$.

1 тур ($x=2, s=3>x$)		2 тур ($y=4, t=4\geq y$)		Сумма	
Участник	Баллы	Участник	Баллы	Участник	Сумма
Костя	400	Оля	400	Лена	797
Вася	399	Лена	399	Вася	796
Лена	398	Петя	398	Оля	401
Петя	2	Вася	397	Костя	401
Оля	1	Костя	1	Петя	400

У нас второе место. Переходим к $s-1$ делению в первом туре.

1 тур ($s-1=2$)		2 тур ($t=4$)		Сумма	
Участник	Баллы	Участник	Баллы	Участник	Сумма
Костя	400	Оля	400	Вася	796
Вася	399	Лена	399	Лена	402
Лена	3	Петя	398	Оля	401
Петя	2	Вася	397	Костя	401
Оля	1	Костя	1	Петя	400

Изменились баллы Лены, она была выше Васи, а стала ниже, следовательно, Вася поднялся на одно место и сейчас он занимает первое.

Доказательство. Заметим, что эти два деления отличаются лишь баллами участника A_s в первом туре. Если в s -делении участник A_s был хуже Васи, то Васино место не изменится (т.к. участник A_s и остался хуже Васи). Если же он был лучше, то Васино место уменьшится на один (т.к. участник A_s стал хуже Васи).

Утверждение 3. Рассмотрим расстановку баллов, соответствующую x -делению первого тура и y -делению второго тура. Тогда полученная расстановка баллов гарантирует Васе наилучшее возможное место (то есть минимальное), обозначим его *Best*.

1 тур ($s=x=2$)		2 тур ($t=y=4$)		Сумма	
Участник	Баллы	Участник	Баллы	Участник	Сумма
Костя	400	Оля	400	Вася	796
Вася	399	Лена	399	Лена	402
Лена	3	Петя	398	Оля	401
Петя	2	Вася	397	Костя	401
Оля	1	Костя	1	Петя	400

Оптимальная расстановка баллов. Решение задачи для лиги «В». Все, кто были ниже Васи хотя бы в одном из туров, теперь ниже Васи и по сумме.

Доказательство. Предположим, что существует другая расстановка баллов (будем называть ее *новой*), при которой Васино место строго меньше. Тогда существует участник, стоящий в текущей расстановке выше (то есть имеет меньшее место) Васи, а в новой – ниже Васи (то есть имеет большее место). Т.к. в новой расстановке он находится ниже Васи, то это значит, что он находится ниже Васи хотя бы в одном из туров. Но тогда по утверждению 1 в текущей расстановке он имеет сумму баллов, меньшую чем Вася. Противоречие.

Утверждение 4. Рассмотрим n -деление первого тура и n -деление второго тура. Пусть по сумме баллов Вася занимает место p , и пусть $p \geq q \geq \text{Best}$. Тогда существует расстановка баллов, гарантирующая Васе место q в итоговой таблице.

Доказательство. Будем смещать деления (переходить от s -деления первого тура к $s-1$ -делению первого тура или переходить от t -деления второго тура к $t-1$ делению второго тура), пока $s > x$ или $t > y$. В конце процесса мы получаем x -деление в первом туре и y -деление во втором туре, то есть

минимально возможное место. Так как по утверждению 3 Васино место изменяется при каждом переходе не более чем на 1, то место в итоговой таблице будет пробегать все возможные значения от p до минимально возможного места.

Сформулируем теперь симметричные утверждения, все они доказываются аналогично.

Утверждение 1'. Рассмотрим s -деление первого тура и t -деление второго тура, причем $s \leq x-1$, $t \leq y-1$. Тогда участники с номерами $A_1, A_2, \dots, A_s, B_1, B_2, \dots, B_t$ имеют сумму баллов строго больше, чем у Васи.

Утверждение 2'. Пусть $s < x-1$, $t \leq y-1$. Рассмотрим расстановку баллов, соответствующую s -делению первого тура и t -делению второго тура. Пусть при такой расстановке баллов в таблице результатов по сумме двух туров мы занимаем некоторое место p . При расстановке баллов, соответствующей $s+1$ делению в первом туре, и t -делению во втором туре, мы занимаем либо место p , либо место $p+1$.

Утверждение 3'. Рассмотрим расстановку баллов, соответствующую $(x-1)$ -делению первого тура и $(y-1)$ -делению второго тура. Тогда полученная расстановка баллов гарантирует Васе наихудшее возможное место (то есть максимальное), обозначим его *Worst*.

Утверждение 4'. Рассмотрим 0-деление первого тура и 0-деление второго тура. По сумме баллов мы занимаем место p , то же самое, что и в утверждении 4. Пусть $p \leq q \leq \text{Worst}$. Тогда существует расстановка баллов, гарантирующая Васе место q в итоговой таблице.

1 тур ($s=0$)		2 тур ($t=0$)		Сумма	
Участник	Баллы	Участник	Баллы	Участник	Сумма
Костя	5	Оля	5	Лена	7
Вася	4	Лена	4	Вася	6
Лена	3	Петя	3	Костя	6
Петя	2	Вася	2	Оля	6
Оля	1	Костя	1	Петя	5

1 тур ($s=n$)		2 тур ($t=n$)		Сумма	
Участник	Баллы	Участник	Баллы	Участник	Сумма
Костя	$400=5+395$	Оля	$400=5+395$	Лена	$797=7+2 \cdot 395$
Вася	$399=4+395$	Лена	$399=4+395$	Вася	$796=6+2 \cdot 395$
Лена	$398=3+395$	Петя	$398=3+395$	Костя	$796=6+2 \cdot 395$
Петя	$397=2+395$	Вася	$397=2+395$	Оля	$796=6+2 \cdot 395$
Оля	$396=1+395$	Костя	$396=1+395$	Петя	$795=5+2 \cdot 395$

Заметим, что таблицы различаются лишь сдвигом, поэтому место не меняется

Таким образом, для любого q , $\text{Best} \leq q \leq \text{Worst}$ (очевидно, что для q не лежащего в данных пределах ответ «Impossible») существует расстановка баллов, гарантирующая Васе место q в итоговой таблице, причем ответ может иметь вид s -деления первого тура, и t -деления второго тура для некоторых s и t . Исходя из вышесказанного, мы можем сформулировать алгоритм решения данной задачи:

1. Перебрать s , от 0 до n
2. Перебрать t , от 0 до n

3. Рассмотреть расстановку баллов первого тура, соответствующую s -делению, и расстановку баллов второго тура, соответствующую t -делению. Построить итоговую таблицу.
4. Проверяем место Васи в полученной итоговой таблице: если оно равно необходимому, то выводим ответ.
5. Если ни для каких s и t ответ не был найден, то ответ *Impossible*.

Приведенная ниже реализация данного алгоритма работает за $O(N^3)$.

```
#include <stdio.h>
const int PMAX=400;
const int N=200;
int res[N][2], p[N][2], n, a;
int get() //вычисление места при заданной расстановке баллов, Вася - номер 0
{
    int r=0;
    for(int i=0; i<n; ++i)
        if(res[i][0]+res[i][1]>res[0][0]+res[0][1]) r++;
    return r;
}
int main()
{
    freopen("juggling.in", "r", stdin);
    freopen("juggling.out", "w", stdout);
    scanf("%d%d", &n, &a); a--;
    for(int j=0; j<2; ++j)
        for(int i=0; i<n; ++i)
        {
            scanf("%d", &p[i][j]);
            p[i][j]--; //обратите внимание, нумерация идет с 0!
        }
    for(int i=0; i<n; ++i)
    {
        //построение i-деления первого тура
        int pts=PMAX;
        for(int j=0; j<i; ++j)
            res[p[j][0]][0]=pts, pts--;
        pts=n-i;
        for(int j=i; j<n; ++j)
            res[p[j][0]][0]=pts, pts--;
        for(int j=0; j<n; ++j)
        {
            //построение j-деления второго тура
            pts=PMAX;
            for(int k=0; k<j; ++k)
                res[p[k][1]][1]=pts, pts--;
            pts=n-j;
            for(int k=j; k<n; ++k)
                res[p[k][1]][1]=pts, pts--;
            if(get()==a) //ура, мы нашли ответ!
            {
                printf("Possible\n");
                for(int t=0; t<2; ++t)
                {
                    for(int k=0; k<n; ++k)
                        printf("%d ", res[p[k][t]][t]);
                    printf("\n");
                }
                return 0;
            }
        }
    }
    printf("Impossible\n");
    return 0;
}
```

Заметим, что переходя от деления к соседнему, мы можем «на лету» пересчитывать наше место. Данное замечание позволяет ускорить алгоритм до $O(N)$. Желающие смогут посмотреть реализацию в архиве жюри.