Разбор задачи «H. Пицца»

Автор задачи — В. Гуровиц, разбора — Б. Василевский

Необходимо рассмотреть две альтернативы: непременно получить бесплатную доставку, заказав на сумму более C рублей, либо заплатить $A+B$ рублей (либо только A, если $A > C$). Первый вариант сводится к поиску минимальной суммы, большей $C - A$, которую можно набрать товарами с ценами из набора $d_1, d_2, \ldots, d_N$ (вместе с уже выбранными A рублями этой суммы будет достаточно для получения бесплатной доставки). Задачи такого рода называются *задачами о рюкзаке*. Обсудим решение данной.

Пусть $D[m][s]$ равно $true$, если среди чисел из набора $d_1, d_2, \ldots, d_m$ можно выбрать некоторое количество, сумма которых равна s, иначе — $false$; при этом $0 \le m \le N$, $0 \le s \le d_1 + d_2 + \cdots + d_m$. По определению, $D[0][0] = true$, другие значения s при $m = 0$ невозможны (для них автоматически $D[0][s] = false$).

Предположим, на предыдущем шаге было вычислено $D[m-1][s]$ для всех допустимых s. Тогда товар d_m можно либо добавлять в набор, либо нет:

$$D[m][s] = D[m-1][s-d_m] \vee D[m-1][s] \qquad (1)$$

Здесь $\vee$ — операция логического `или`.

Переходя от $m-1$-го к m-му шагу каждый раз по этой формуле, дойдём до $m = N$.

При реализации нам понадобится всего один массив $E[s]$. На стадии инициализации $E[s] = D[0][s]$, то есть $E[0] = true, E[s \ne 0] = false$. В начале очередного шага номер $m-1$ имеем: $E[s] = D[m-1][s]$ для всех $0 \le s \le MaxS$. По окончанию шага будет выполнено $E[s] = D[m][s]$.

```
for m := 1 to N do begin
    { E[s] = D[m - 1][s] }
    for s := MaxS downto d[m] do
        E[s] := E[s] or E[s - d[m]];
    { E[s] = D[m][s] }
end;
```

Остаётся найти минимальное $s > C - A$, для которого $D[N][s](= E[s]) = true$. Настало время обсудить ограничения и время работы.

Для реализации формулы (1) на каждом шаге требуется $O(d_1 + \cdots + d_m) = O(MaxS)$ действий. Поэтому при количестве шагов, равном N, суммарное количество действий составит $O(N\dot{M}axS)$. Это слишком много, поскольку $MaxS = 10^6$ и $N \le 1\,000$. Однако, по смыслу задачи нас интересуют лишь те s, которые меньше B, ведь выбрав $s \ge B$, придётся потратить не меньше $A+B$, но этот результат может быть достигнут во втором случае (взять доставку за свой счёт). Поэтому цикл по s в коде достаточно начинать с $B-1$. Таким образом, на каждом шаге будет проделано лишь $O(B)$ операций, и оценка $O(NB)$ на суммарное время работы уже подходит под ограничения задачи.