Разбор задачи «B. Стройка»

Автор задачи — Ю. Егоров, разбора — Б. Василевский, Е. Андреева

В этой задаче нужно было определить, существует ли треугольник, внутри которого лежат ровно две из трех данных окружностей. Это разбор состоит из двух частей. В первой с достаточной степенью строгости обосновывается главная идея решения: достаточно найти разделяющую прямую, которую можно искать как общую касательную к двум из трёх данных окружностей. Во второй подробно обсуждается техническая часть.

Определение 1 *Разделяющей прямой назовём такую прямую, которая не пересекает (касание допускается) ни одну из данных окружностей, и найдётся пара из них, которые лежат по разные стороны относительно этой прямой.*

Утверждение 1 *Искомый треугольник существует тогда и только тогда, когда можно найти разделяющую прямую*

Доказательство. $\Leftarrow$ Используем следующее общеизвестное утверждение: любые два непересекающихся выпуклых тела могут быть разделены прямой. Если искомый треугольник существует, то найдется прямая, которая разделяет его и оставшуюся окружность. Так как остальные две лежат внутри треугольника, то эта прямая отделяет первую окружность от двух других.
$\Rightarrow$ Построить треугольник по прямой также несложно: рассмотрим отрезок этой прямой с длиной 10^9, такой что проекции всех центров данных окружностей на прямую лежат не дальше чем на 10^6 от его середины. Тогда равносторонний треугольник, построенный на этом отрезке как на стороне, лежащий по ту же сторону относительно прямой, что и две из трех окружностей, будет искомым засчёт относительно малых размеров исходных данных по сравнению с ним. ■

Утверждение 2 *Разделяющую прямую можно искать как общую касательную к каким-нибудь двум данным окружностям.*

Доказательство. Нужно показать, что если для даннах трех окружностей существует разделяющая прямая l, то найдётся общая касательная к двум из них, также разделяющая.

Без ограничения общности будем считать, что прямая l не горизонтальна. Будем двигать её горизонтально влево, пока она не начнёт касаться одной из окружностей, которую мы обозначим через C_1 (рано или поздно это произойдёт из требований определения 1). Очевидно, что полученная прямая l' также является разделяющей, поэтому если она касается ещё какой-нибудь окружности, то утверждение доказано. Иначе будем поворачивать l' против часовой стрелки относительно центра C_1, пока она не станет касаться некоторой C_2. Полученная прямая является искомой. ■

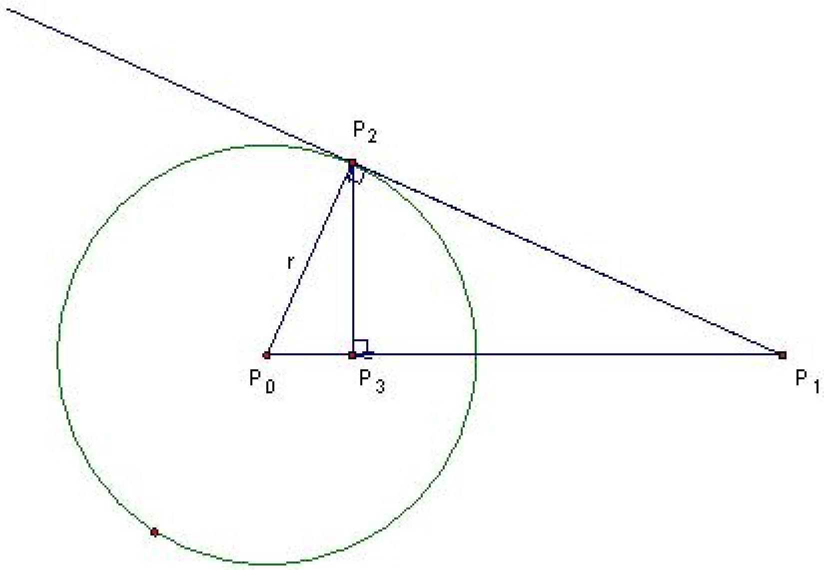
Итак, исходя из сформулированных утверждений, решение этой задачи может выглядеть так: переберем все общие касательные (4 на каждую пару окружностей, 12 всего) и проверим, является ли каждая из них разделяющей. Если решение так и не нашлось, то его не существует.

Проверка прямой не представляет труда: нужно проверить отсутствие пересечений прямой и окружностей (расстояние от центра до прямой не меньше радиуса) и наличие хотя бы одного центра в каждой из полуплоскостей. Ключевой момент в задаче — уметь строить общие касательные. Прежде перейти к его обсуждению, заметим следующее. Если немного модифицировать доказательство утверждения 2, то можно показать возможность получить из любой разделяющей переносом и поворотом общую внутреннюю касательную к некоторым двум из трех данных окружностей. **Это позволит выбросить из рассмотрения внешние касательные**.

Задача о построении общих касательных сводится к задаче о построении касательной к окружности из данной точки. Сначала мы подробно обсудим решение второй задачи, после чего перейдём к первой.

Пусть окружность имеет центр в точке $P_0(x_0, y_0)$ и радиус r. Требуется найти уравнения касательных к ней, проходящих через точку $P_1(x_1, y_1)$.

Здесь возможны три случая. Если $|P_0P_1| < r$, то P_1 лежит внутри окружности, и касательных, проходящих через нее, не существует. Если $|P_0P_1| = r$, то P_1 лежит на окружности. Тогда у искомой касательной нам известны точка P_1 и нормаль $\overrightarrow{P_0P_1}$, и ее уравнение легко выписывается. Наконец, в случае $|P_0P_1| > r$ точек касания две и, обозначив одну из них P_2, мы имеем прямоугольный треугольник $P_0P_2P_1$ (см. рисунок). Опустим из



вершины P_2 прямого угла высоту P_2P_3. Из подобия треугольников $P_1P_2P_0$ и $P_1P_3P_2$ найдем длины отрезков

$$|P_1P_3| = \frac{|P_1P_2|^2}{|P_0P_1|}, \qquad |P_3P_2| = \frac{|P_1P_2| \cdot |P_0P_2|}{|P_0P_1|}$$

Теперь последовательно находим координаты вектора $\overrightarrow{P_1P_3}$, точки $P_3(x_3, y_3)$, и наконец, используя известные координаты вектора $\vec{n} = (y_0 - y_1, x_1 - x_0)$, перпендикулярного прямой P_1P_3, координаты точки P_2:

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \frac{|P_1P_3|}{|P_1P_0|} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}; \quad x_3 = x_1 + (\overrightarrow{P_1P_3})_x, \quad y_3 = y_1 + (\overrightarrow{P_1P_3})_y;$$
$$\overrightarrow{P_3P_2} = \frac{|P_3P_2|}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}; \quad x_2 = x_3 + (\overrightarrow{P_3P_2})_x, \quad y_2 = y_3 + (\overrightarrow{P_3P_2})_y.$$

Вернёмся к первоначальной задаче. Пусть имеются две окружности с центрами P_1, P_0 и радиусами $r_1 \le r_2$. "Сдуем" их, превратив первую в точку P_1, а вторую — в окружность радиуса $r = r_2 - r_1$ с тем же центром. Построим обе касательные l_1, l_2 из точки P_1 к окружности, а после этого "раздуем" рисунок обратно, теперь уже вместе с прямыми l_1, l_2. Другими словами, l'_1 получается из l_1 параллельным переносом на вектор

$$\vec{v}_1 = \frac{r_1}{|P_0P_2|}(\overrightarrow{P_0P_3} + \overrightarrow{P_3P_2}) = \frac{r_1}{r_2 - r_1}(x_2 - x_0, y_2 - y_0),$$

а l'_2 — из l_2 переносом на вектор

$$\vec{v}_2 = \frac{r_1}{|P_0P_2|}(\overrightarrow{P_0P_2} - \overrightarrow{P_2P_3}) = \frac{r_1}{r_2 - r_1}(2x_2 - x_0 - x_3, 2y_2 - y_0 - y_3)$$

Полученные l'_1 и l'_2 — искомые общие внешние касательные к исходным окружностям.

Чтобы найти внутренние, первую окружность надо "сдувать", а вторую — "раздувать". Формально, рассмотрим точку P_1 и окружность с центром P_0 радиуса $r_1 + r_2$. Пусть l_1 и l_2 — касательные из точки P_1 к окружности. Искомые l'_1 и l'_2 получаются них параллельным переносом на векторы $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$:

$$\vec{w}_1 = -\frac{r_1}{|P_0P_2|}(\overrightarrow{P_0P_3} + \overrightarrow{P_3P_2}) = -\frac{r_1}{r_1 + r_2}(x_2 - x_0, y_2 - y_0) \qquad (1)$$

$$\vec{w}_2 = -\frac{r_1}{|P_0P_2|}(\overrightarrow{P_0P_3} - \overrightarrow{P_3P_2}) = -\frac{r_1}{r_1 + r_2}(2x_2 - x_0 - x_3, 2y_2 - y_0 - y_3)$$

Напоследок разберём крайние случаи. При построении внешних касательных может выйти так, что $r_1 = r_2$, то есть $r = 0$. Уравнение искомой прямой $l_1 = (P_0P_1)$ выписывается просто, однако $|P_0P_2|$ оказывается нулевым. Этот случай надо разобрать отдельно и положить $\vec{v}_1$ перпендикулярным l_1 с длиной r_1, $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$.

При построении внутренних касательных крайним является случай $|P_0P_1| = r_1 + r_2$ (по условию, $|P_0P_1| \ge r_1 + r_2$), существует единственная общая касательная. Главная проблема здесь — найти прямую l_1. Тогда $P_1 = P_2$, формула (1) работает исправно.