Разбор задачи «Трехветные таблицы»

Задача F, лига A

Автор задачи и разбора — Б. Василевский

В обеих лигах было похожее условие, и решение задачи лиги A отличалось лишь на один дополнительный логический шаг.

Самое сложное здесь — распознать, существует ли хотя бы одно решение, или надо выводить 0.

Условимся называть цветом строки/столбца правильной раскраски тот цвет, в который этот стоблец/строку красили (он может быть синим либо желтым).

Рассмотрим для начала случай, когда ни про одну из клеток таблицы ничего не известно. Очевидно, существует хотя бы одна правильная раскраска (например, все зеленые). Сколько же их? Если бы для каждой покраски столбцов и строк получались бы различные раскраски клеток таблицы, ответ на этот вопрос был бы 2^{n+m}. Однако это не всегда так. Рассмотрим правильную раскраску таблицы.

1. Если есть хотя бы одна не зеленая клетка, то однозначно определяются цвета соответствующих строки и столбца, откуда уже по пересечениям для каждой строки и каждого стоблца однозначно восстанавливается цвет, в который их красили.

2. Раскраска таблицы, в которой все клетки зеленые, могла быть получена двумя способами: все строки красятся в один цвет, все стоблцы — в другой.

Таким образом, есть только одна правильная раскраска таблицы, которая получается двумя способами, а по остальным цвета строк и столбцов определяются однозначно. Поэтому всего правильных раскрасок $2^{n+m} - 1$.

Перейдем теперь к поставленной задаче, когда известен цвет некоторых клеток. В свете предыдущих рассуждений логично сначала посчитать количество раскрасок строк и стоблцов, удовлетворяющих данной таблице. Если при этом все известные цвета были зеленые, то из полученного ответа надо вычесть единицу, так как в этом случае два раза была посчитана раскраска всех клеток таблицы в зеленый цвет.

Рассмотрим двудольный граф; вершины первой доли будут соответствовать строкам таблицы, второй — стоблцам. Между вершинами i первой доли и j второй будет идти ребро тогда и только тогда, когда в таблице на позиции (i, j) стоит не 0. Суть этого ребра проста: если мы как-то узнаем цвет i-й строки, то сможем однозначно восстановить цвет j-го столбца,

	3				
3		3			
	3				
			1		3
					3

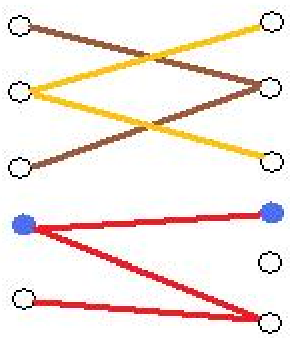

Рис. 1: Исходная таблица, где нули заменили на пустые клетки, и построенный по ней граф

и наоборот. Заметим далее, что если в i-й строке данной таблицы встречается 1 или 2, то цвет этой строки мы знаем. В этом случае будем говорить, что i-я вершина первой доли покрашена в этот цвет. Аналогичную процедуру проделаем для столбцов. Все остальное вершины будем считать не покрашенными.

После проведения всех ребер граф разбивается на компонеты связности. Они будут двух типов: те, в которых есть покрашеные вершины, и те, в которых нет. Рассмотрим компоненту $\mathcal{D}$ первого типа. Обойдем ее (в ширину или в глубину) из покрашенной вершины и определим цвета всех остальных в этой компоненте. Теперь надо проверить ответ: для каждой строки i и стоблца i, принадлежащих $\mathcal{D}$, число в позиции (i, j) таблицы должно быть либо нулем, либо строго определенным по цвету вершин i и j. В случае несовпадения надо сразу выводить 0 и завершать работу.

Допустим, во время просмотра каждой компоненты первого типа противоречий не возникло. Сколько существует вариантов раскрасить вершины данной компоненты $\mathcal{E}$ второго типа? Вспомним свойство двудольного графа: если в нем есть циклы, то они четной длины. Из него следует, что есть всего два способа — когда первая доля $\mathcal{E}$ синяя, а вторая — желтая, и наоборот.

Итак, число правильных раскрасок, согласованных с данной таблицей, равно (2 в степени количество компонент второго типа) и минус один в случае, если все клетки таблицы либо 0, либо 3. Для примера с рисунка 1 ответ будет 8.

Ограничения специально были такими, чтобы ответ мог уместиться в `int64` / `long long`.